ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Линейная алгебра»

1 курс, весенний семестр, 2013/2014 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

(Поток Чубарова И.А.)

1. Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса упрощения системы линейных уравнений и матрицы. Главные и свободные неизвестные. Разложение общего решения неоднородной системы линейных уравнений в сумму частного решения и общего решения соответствующей однородной системы уравнений.
2. Понятия базиса и ранга конечного набора векторов (в частности, строк или столбцов). Определение ранга матрицы. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразований (алгоритм нахождения базисных столбцов).
3. Базисный минор, равенство ранга матрицы порядку ее базисного минора. Теорема о базисном миноре, вычисление ранга методом окаймления миноров. Критерий равенства определителя нулю.
4. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной систем линейных уравнений. Критерий совместности (теорема Кронекера–Капелли) и ее следствие (условие единственности решения). Теорема Фредгольма.
5. Определение линейного пространства, простейшие следствия из аксиом. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, постоянство числа векторов базиса данного пространства, размерность. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса.
6. Подпространства в линейном пространстве. Примеры. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Задание подпространства системой линейных однородных уравнений. Построение базиса (фундаментальной системы решений) в подпространстве решений однородной системы линейных уравнений.
7. Пересечение, сумма подпространств линейного пространства. Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств (формула Грассмана). Прямая сумма подпространств, условия, при которых пространство является прямой суммой подпространств.
8. Линейные отображения и преобразования линейных пространств. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения, связь их размерностей. Критерий инъективности линейного отображения. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности. Матрица линейного отображения и ее изменение при замене базисов; случай линейного преобразования. Инвариантность ранга и определителя матрицы линейного преобразования.
9. Действия с линейными отображениями (преобразованиями), матричная форма этих действий. Алгебра линейных преобразований. Обратимые линейные отображения (преобразования), критерии обратимости.
10. Подпространства, инвариантные относительно линейного преобразования. Примеры. Ограничение преобразования на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного преобразования при наличии нетривиального инвариантного подпространства и при наличии инвариантного дополнения.
11. Собственный вектор и собственное значение линейного преобразования. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы линейного преобра-

зования, их независимость от выбора базиса. Выражение определителя и следа матрицы через характеристические корни. Собственное подпространство, неравенство между размерностью собственного подпространства и кратностью характеристического корня.

12. Диагонализируемые линейные преобразования (матрицы). Достаточное условие диагонализируемости (наличие n различных собственных значений) Критерии диагонализируемости. Формулировка теоремы Жордана. Приведение матрицы линейного преобразования к фундаментальному виду. Теорема Гамильтона–Кэли.
13. Корни многочлена с действительными коэффициентами. Существование двумерного инвариантного подпространства, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена, для линейного преобразования вещественного линейного пространства.
14. Линейные функции на линейном пространстве, линейные операции над ними. Сопряженное пространство, равенство размерностей конечномерного пространства и сопряженного с ним. Сопряженный (биортогональный) базис сопряженного пространства. Координатная запись линейной функции в различных базисах. Второе сопряженное пространство, естественное вложение пространства во второе сопряженное (изоморфизм в конечномерном случае).
15. Билинейные функции и формы, их матрицы. Симметрические и кососимметрические билинейные функции и формы. Изменение матрицы билинейной функции при замене базиса, инвариантность ранга и знака определителя (в вещественном случае).
16. Квадратичные функции и формы, их матрицы, восстановление симметрической билинейной функции, задающей данную квадратичную функцию. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Теорема Якоби. Положительно (отрицательно) определенные квадратичные функции. Критерий Сильвестра.
17. Евклидово пространство (пространство со скалярным произведением). Неравенство Коши–Буняковского (со случаем равенства). Длина вектора, угол между двумя векторами. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее определитель, запись скалярного произведения в координатах. Ортогональность векторов в пространстве со скалярным произведением. Линейная независимость системы попарно ортогональных векторов.
18. Ортонормированный базис, его построение по алгоритму ортогонализации (Грама–Шмидта). Ортогональность матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение к подпространству, разложение вектора на ортогональную проекцию на подпространство и ортогональную составляющую. Угол между вектором и подпространством.
19. Линейные преобразования евклидовых пространств. Преобразование, сопряженное к данному, его матрица. Самосопряженное преобразование и его матрица. Свойства характеристических корней и собственных векторов самосопряженного преобразования; существование ортонормированного базиса из собственных векторов.
20. Ортогональные преобразования, их матрицы. Свойства их характеристических корней, собственных значений и векторов. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.
21. Полярное разложение (матрицы) невырожденного линейного преобразования линейного пространства. Сингулярное разложение.
22. Приведение квадратичной формы к диагональному виду (к главным осям) при помощи ортогональной замены переменных. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определённа.
23. Применение теории квадратичных форм к ортогональной классификации поверхностей второго порядка.
24. Унитарное линейное пространство. Эрмитовы (полуторалинейные) формы на линейном пространстве. Эрмитовы (самосопряженные) и унитарные преобразования.

25. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Симметрические и кососимметрические тензоры.

Рекомендуемая литература

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Физматлит, 2004.
2. *Умнов А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. – М.: МФТИ, 2006, http://www.umnov.ru.
3. *Чехлов В.И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2 Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2005.
5. *Шевцов Г.С.* Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. – М.: Финансы и статистика, 2003.