

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

1 курс, 2 семестр, 2008/2009 уч.г.

(Поток В.В. Беяева)

1. Системы линейных уравнений. Критерии совместности Кронекера–Капелли и Фредгольма. Структура общего решения совместной неоднородной системы. Фундаментальная система решений однородной системы.
2. Понятие ранга матрицы. Теоремы о базисном миноре и ранге матрицы.
3. Линейные пространства. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и эквивалентные условия. Существование базиса и равномощность базисов. Понятие размерности. Координатизация пространств и матрица перехода.
4. Понятие подпространства. Теорема о монотонности размерности. Сумма и пересечение подпространств. Линейная независимость подпространств и критерий линейной независимости двух подпространств. Прямая сумма и прямое дополнение. Размерность суммы и прямой суммы подпространств.
5. Линейные отображения и действия с ними. Ядро и образ отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Матрица линейного отображения и действия в координатах.
6. Линейные операторы и их матрицы. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Понятие определителя оператора. Обратимые операторы и критерии обратимости. Операторы проектирования и отражения.
7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных (спектральных) подпространств. Оценка размерности собственного подпространства.
8. Диагонализируемые операторы. Необходимые и достаточные условия диагонализируемости. Критерий диагонализируемости в терминах аннулятора оператора.
9. Подпространства, инвариантные относительно действия оператора. Приведение матрицы линейного оператора к треугольному виду: необходимые и достаточные условия в терминах характеристического многочлена оператора.
10. Симметрические операторы и их диагонализируемость.
11. Линейные функции и действия с ними. Сопряжённое пространство. Изоморфность конечномерного пространства и пространства, сопряжённого с ним. Сопряжённый (биортогональный) базис и его единственность.
12. Линейное пространство, сопряжённое с сопряжённым; канонический изоморфизм. Аннуляторы подпространств в сопряжённом пространстве, их свойства. Теорема Фредгольма.
13. Симметрические билинейные функции и понятие ортогональности. Существование ортогонального базиса для любой симметричной билинейной функции.
14. Положительно определённые билинейные функции и критерий Сильвестра.
15. Связь между билинейными и квадратичными функциями. Закон инерции симметричных билинейных (квадратичных) функций.
16. Евклидовы пространства и скалярное произведение. Матрица Грама. Неравенство Коши–Буняковского. Длина и угол. Неравенство треугольника.
17. Ортогональность в евклидовых пространствах. Ортогональные дополнения подпространств, линейная независимость системы попарно ортогональных векторов, процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
18. Сопряжённые и ортогональные операторы евклидова пространства, их свойства и матрицы в ортонормированном базисе.

19. Самосопряжённые операторы евклидова пространства: ортогональность их собственных векторов с различными собственными значениями. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов. Матрица перехода между ортонормированными базами.
20. Сингулярное и полярное разложение линейного оператора евклидова пространства.
21. Одновременное приведение к диагональному виду пары билинейных (квадратичных) функций, одна из которых положительно определена.
22. Необходимое и достаточное условие одновременного приведения к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых невырождена.