

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Линейная алгебра»

1 курс, весенний семестр, 2013/2014 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

(Поток Беклемишева Д.В.)

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера–Капелли. Теорема Фредгольма. Общее решение системы линейных уравнений.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.
4. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и её свойства.
5. Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.
6. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество значений. Ранг линейного отображения. Условия инъективности и сюръективности. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование.
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Простейший вид матрицы линейного отображения.
8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Ограничение преобразования на инвариантном подпространстве. Собственные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
9. Характеристическое уравнение. Инвариантность характеристического многочлена. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
10. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду.
11. Линейные функции. Сопряжённое пространство. Биортогональный базис. Пространство, сопряжённое сопряжённому пространству.
12. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Знакоопределённые квадратичные формы. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра.
14. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и её свойства. Ортогональные базисы. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы.
15. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Процесс ортогонализации. QR разложение.
16. Линейные преобразования евклидова пространства. Преобразование, сопряжённое данному. Матрица сопряжённого преобразования. Свойства сопряжённого преобразования.
17. Самосопряжённые преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряжённого преобразования.
18. Отображения, сохраняющие скалярное произведение. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные преобразования. Их свойства.

19. Сингулярное разложение прямоугольной матрицы. Его геометрический смысл. Сингулярные числа и сингулярные базисы линейного отображения.
20. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярные числа линейного преобразования, их свойства.
21. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм.
22. Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.
23. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовом пространстве.