ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Линейная алгебра»

1 курс, весенний семестр, 2013/2014 уч.г.

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис линейного пространства.
4. Разложение вектора по базису линейного пространства. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме конечномерных линейных пространств.
5. Изменение координат вектора при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства.
6. Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.
7. Линейные отображения и линейные преобразования (эндоморфизмы) линейного пространства. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Операции над линейными отображениями. Обратное преобразование.
8. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования конечномерных пространств. Операции над линейными отображениями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов.
9. Инвариантные подпространства линейных преобразований (эндоморфизмов). Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов линейных преобразований, принадлежащих различным собственным значениям.
10. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования (эндоморфизма) конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования (эндоморфизма) конечномерного линейного пространства.
11. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство.
12. Билинейные и квадратичные формы на линейных пространствах. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм на конечномерном линейном пространстве при изменении его базиса.
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичных форм на конечномерных линейных пространствах.
14. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
15. Конечномерное евклидово линейное пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы, их свойства. Ортогональное дополнение подпространства.
16. Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования (эндоморфизмы) линейных пространств, их свойства.

17. Самосопряженные преобразования (эндоморфизмы) линейных пространств. Свойства их собственных векторов и собственных значений.
18. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования (эндоморфизма).
19. Ортогональные преобразования линейных пространств, их свойства.
20. Построение ортонормированного базиса конечномерного линейного пространства, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределённой.
21. Унитарное линейное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования (эндоморфизмы), их свойства. Эрмитовы формы.