

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
ПО МАТЕМАТИКЕ В МАГИСТРАТУРУ МФТИ
(специальности «Системный анализ и управление»,
«Информатика и вычислительная техника»)**

1. Векторы. Операции над векторами и их свойства. Базис. Системы координат.
2. Матрицы. Операции над матрицами. Детерминант. Минор, базисный минор и ранг матрицы. Обратная матрица.
3. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера–Капелли. Общее решение системы.
4. Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости.
5. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
6. Производная функции. Вычисление производных. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций.
7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
8. Исследование функции одного переменного с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
9. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости.
10. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.
11. Условный экстремум функций нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа (необходимые условия экстремума).
12. Первообразная и неопределённый интеграл. Основные методы интегрирования.
13. Определённый интеграл. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница.
14. Несобственные интегралы. Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки сравнения.
15. Числовые ряды. Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки сравнения.
16. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.
17. Степенные ряды. Радиус сходимости. Ряд Тейлора.
18. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
19. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского–Гаусса.
20. Формула Стокса.
21. Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье.
22. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений. Методы их решения.
23. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных. Определитель Вронского, формула Лиувилля–Остроградского.
24. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
25. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
26. Случайная величина и её функция распределения.
27. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

28. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел. Теорема Муавра–Лапласа и предельная теорема Пуассона.
29. Теория множеств. Операции над множествами. Соответствия. Отношения.
30. Теория графов. Способы задания. Маршруты, цепи, циклы. Деревья. Метрика графов.
31. Элементы алгебры логики. Операции над высказываниями. Нормальные формы. Логика предикатов первого порядка.
32. Элементы теории алгоритмов. Разрешимые и перечислимые множества. Рекурсивные функции. Машина Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

для поступающих в магистратуру в 2009 году
по специальностям «Системный анализ и управление»,
«Информатика и вычислительная техника»

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x \operatorname{ctg} x)}{x\sqrt{1+2x} - \arcsin x}.$$

2. Вычислить интеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} dx.$$

3. Перейдя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, свести двойной интеграл

$$\iint_G f(x,y) dx dy$$

к повторному двумя способами, если

$$G = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, (x-1)^2 + y^2 > 1\}.$$

4. Разложить функцию $f(x) = 1 - x$, $0 < x < 1$ в ряд Фурье по системе $\{\sin \pi n x, n = 1, 2, \dots\}$. Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$.
5. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O , точка N лежит на стороне BC , $BN : NC = 3 : 2$. Найти координаты точки N в системе координат $O, \overline{AB}, \overline{AC}$.
6. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 6x - 7y. \end{cases}$$

7. Решить задачу Коши

$$(2y'' + 1)y = 2(y')^2, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 1.$$

8. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 5e^{-2x} + 6 \cos 2x.$$

9. В первой коробке лежат 3 белых и 2 чёрных шара, во второй коробке — 1 белый и 3 чёрных. Из первой коробки во вторую, не глядя, переложили два шара. Затем из второй коробки наугад извлекли шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что переложённые шары были разного цвета.
10. Для булевой функции, реализуемой формулой $(\bar{x} \vee y) \sim (y\bar{z} \rightarrow x)$, построить:
 - таблицу истинности,
 - совершенную дизъюнктивную нормальную форму,
 - совершенную конъюнктивную нормальную форму.

На решение задач отводится три астрономических часа.

Литература

1. Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа.
3. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
4. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
5. В.К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.
6. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика.
7. В.А. Калемаев и др. Теория вероятностей и математическая статистика.

Заведующий кафедрой высшей математики профессор Половинкин Е.С.