

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для переводящихся на второй курс

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 1}{\sqrt{\cos \frac{1}{x} - 1}}.$$

2. Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{(x^3 + 2x)}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx.$$

3. Линейное пространство L является линейной оболочкой функций $\sin x$ и $\cos x$.
Линейное преобразование $A: L \rightarrow L$ таково, что

$$A(\sin x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right), \quad A(\cos x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования A .

4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

при всех значениях параметра α .

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{x}{n}} \right)$$

на множествах $x \in (0, 1)$ и $x \in (1, +\infty)$.