

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(x^2) dx.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k + x^k)}{k^3 + kx}$$

на множествах $x \in (0, 1)$ и $x \in (1, +\infty)$.

4. В двумерном вещественном евклидовом пространстве \mathcal{E} базис $e = \{e_1, e_2\}$ имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, подпространство $M = \text{Lin}\{e_1 + e_2\}$.

Найти базис в ортогональном дополнении M^\perp и матрицу преобразования ортогонального проектирования на M в базисе e .

5. В двумерном вещественном евклидовом пространстве \mathcal{E} с ортонормированным базисом $e = \{e_1, e_2\}$ самосопряженное преобразование имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в \mathcal{E} , в котором это преобразование имеет диагональный вид. Найти этот диагональный вид.

Задачи для поступающих на второй курс для переводников и восстанавливающихся

1. Вычислить предел функции одного вещественного переменного в точке.
2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра несобственный интеграл.
3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд на заданном множестве.
4. В конечномерном вещественном евклидовом пространстве с заданным базисом найти базис в ортогональном дополнении заданного подпространства и преобразование ортогонального проектирования на заданное подпространство.
5. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису конечномерного евклидова пространства, в котором заданное самосопряженное линейное преобразование имеет диагональный вид.

На решение этих задач отводится два астрономических часа.